Leis de Kepler

Claudius Ptolomey, no século II, eleborou o modelo Geocêntrico conciderando a terra como sendo o centro do universo. Este modelo foi aceito por cerca de 1400 anos. Em 1543 o astrônomo polonês Nicolaus Copernicus (1473 - 1543) sugeriu o modelo heliocentrico, posicionando o sol no centro do sistema planetário.

O astronomo dinamarquês Tycho Brahe (1546 - 1601) queria determinar como o "céu" evoluia. Para isso desenvolveu um programa para, através de observações cuidadosas, mapear a evolução temporal dos planetas e das estrelas.

O astrônomo alemão Johemmes Kepler foi assistente de Tycho Brahe por um tempo antes da morte de Brahe. quando erdou seus dados experimentais e passou 16 anos tentando desenvolver um modelo matemático para o movimento dos planetas. Trata-se de uma tarefa complexa pois a terra também está em movimento e não pode ser observada de longe. Após muitos cálculos e reflexões, Kepler encontrou a resposta, nos dados de Brahe, através do movimento de Marte ao redor do sol.

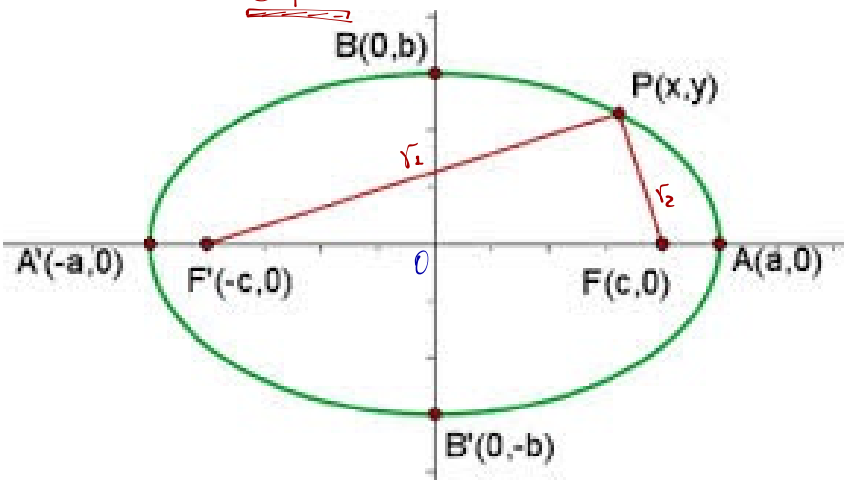
A análise completa do movimento planetário foi sumarizada em três afirmações, conhecidas como Leis de Kepler.

1. Todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o sol em um dos focos.

2. O vetor que liga o sol a um planeta varre áreas iguais em intervalo de tempos iguais.

3. O quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita elíptica.

Elípse

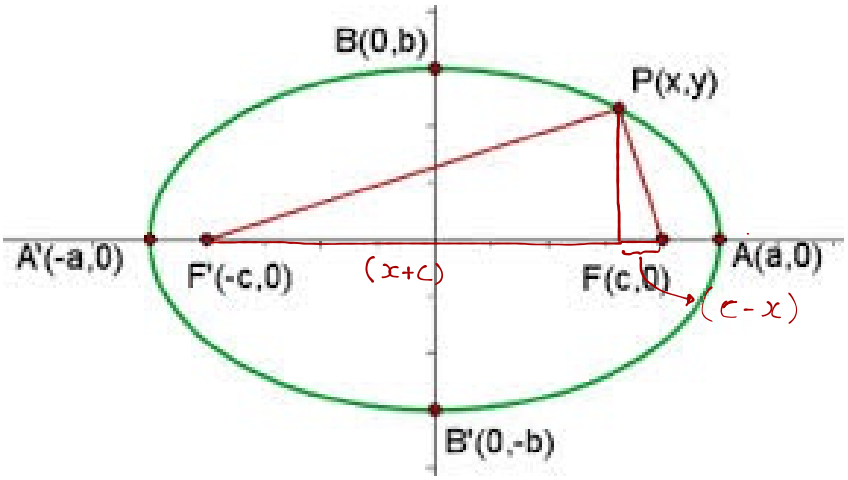


Uma elipse é definida a partir de dois focos simetricamente posicionados em torno do ponto central O e então tomando pontos (curva verde) tais que a soma $r_1 + r_2$ seja constante.

Note que $r_1 + r_2 = 2a$ "So colocar o ponto P sobre o eixo x que isso fica claro."

Obtenção da equação de uma elipse:

Um ponto sobre a elipse possui coordenadas x e y, tais que.



Então $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ e $r_2 = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + \sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} + c^2 - 2cx + x^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}$$

$$cx = a^2 - a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2}$$

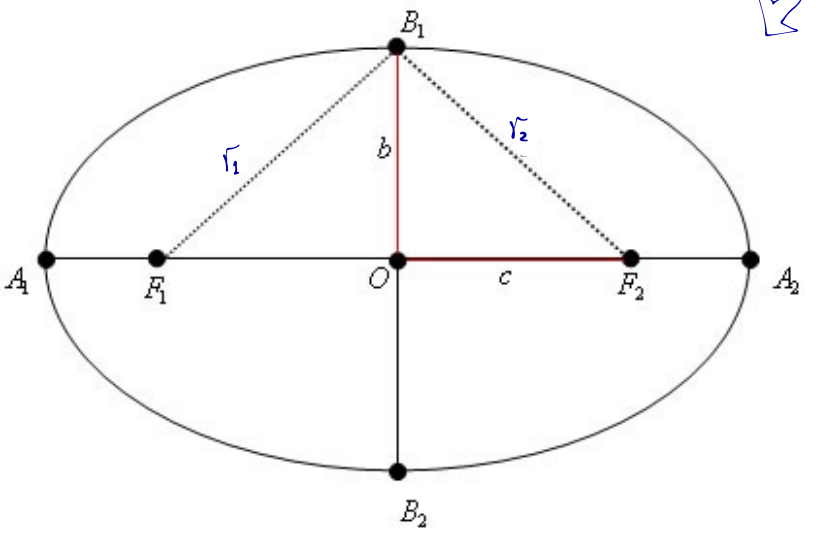
$$a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2c^2 - \cancel{2a^2cx} + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2cx} + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

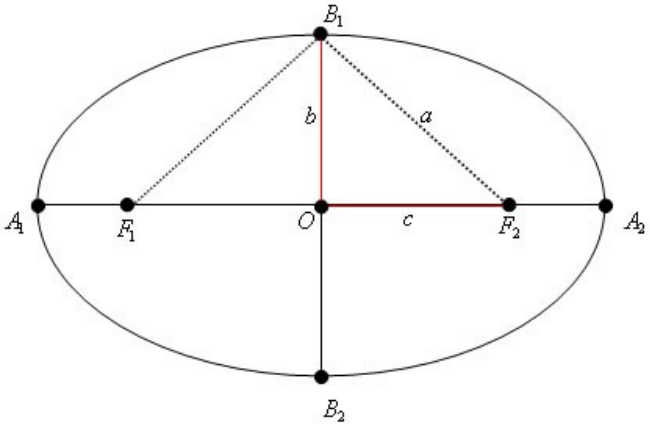
Eq. Kepler (1).

Notar que, como $r_1 + r_2 = 2a$, na situação



$\Rightarrow$ Se $r_1 + r_2 = 2a$, então, como $r_1 = r_2$

$2r_2 = 2a \Rightarrow r_2 = a.$



Então $a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$

Isto em na Eq. Kepler (1):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

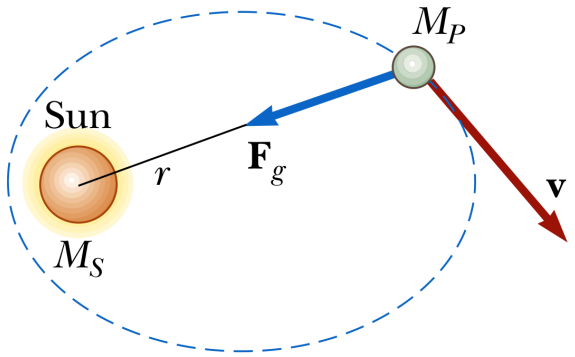
A excentricidade da elipse é denotada por $e = c/a$.

No caso orbital, e é uma medida de o quão fora do centro está o sol ou, em outras palavras, uma medida de o quão circular é a órbita.

Segunda lei de Kepler

A segunda lei de Kepler é uma consequência da conservação do momento angular ($\vec{L}$).

Para um movimento orbital, tal como ilustrado abaixo, utilizando o sol como referencial, temos que o torque ($\vec{\tau}$) é zero.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Como a força é radial $\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0}$

Mas $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

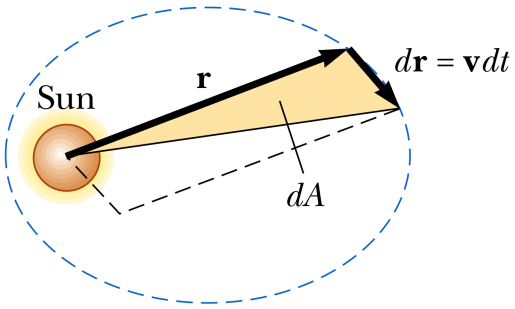
$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{cte}$$

mas $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\vec{L} = m_p \, \vec{r} \times \vec{v}$$

Este resultado pode ser relacionado com a área varrida por $\vec{r}$ como segue:

Na ilustração ao lado a parte "pintada" corresponde à área varrida por $\vec{r}$. Esta área corresponde à metade da área do paralelogramo de lados $\vec{r}$ e $d\vec{r}$



Lembre que:

$$A = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

Em nosso caso, $$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\,dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

Mas como vimos $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = cte \Rightarrow \vec{r} \times \vec{v} = cte \Rightarrow |\vec{r} \times \vec{v}| = cte$

Portanto:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = cte}$$

Terceira lei de Kepler

É informativo mostrar que a terceira lei de Kepler é uma consequência do inverso do quadrado. Vamos considerar uma órbita elíptica com excentricidade zero (caso particular de uma órbita circular).

Aplicando a 2ª lei de Newton (não conhecida por Kepler):

$$\frac{GM_s M_p}{r^2} = \frac{M_p v^2}{r}$$

No caso: $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$\Rightarrow \quad \frac{GM_s M_p}{r^2} = \frac{M_p 4\pi^2 r^2}{r T^2}$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

$$\Rightarrow \quad T^2 = K_s r^3 \quad , \text{ onde } \quad K_s = \frac{4\pi^2}{GM_s} = 2{,}97 \times 10^{-19}\ s^2/m^3 .$$

Obs: Para uma órbita elíptica, basta substituirmos r por a (fica como exercício mostrar isso).

$$\Rightarrow \quad \boxed{T^2 = K_s a^3}$$

Sabendo T obtem-se as distâncias a, que juntamente com a excentricidade, definem a elipse orbital.

Notar: K_s independe da massa do planeta M_p, logo, a equação acima é válida para qualquer planeta.

Por outro lado, se estivermos tratando um outro sistema orbital, lua/terra por exemplo, basta substituirmos M_{lua} em lugar da M_{sol}:

$$K_s \longrightarrow K_{terra} = \frac{4\pi^2}{GM_p}$$

Abaixo apresentamos uma tabela com uma série de dados planetários experimentais, mostrando que $\frac{T^2}{r^3} = cte$

Useful Planetary Data

Body	Mass (kg)	Mean Radius (m)	Period of Revolution (s)	Mean Distance from Sun (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercury	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Mars	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturn	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Uranus	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptune	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Pluto	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Moon	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—	—
Sun	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—	—

R. Serway -- Physics For Scientists And Engineers 6th Ed.